DISTRIBUTIETHEORIE, cursus 2003–2004.
Tweede herhalingstentamen, dinsdag 17 augustus 2004, duur: 3 uur.

1.[1] De onderdelen (a) en (b) van deze opgave zijn onafhankelijk van elkaar.
(a)[4] Stel $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. (i) Geef de definities van de volgende begrippen: (1) De gespiegelde $\check{T}$ van T. (2) De distributie T_λ onder de homothetie $x \mapsto \lambda x$, $\lambda > 0$. (3) "T is even" en "T is oneven". (4) "T is homogeen van de graad $\alpha \in \mathbb{R}$". (ii) Bespreek deze begrippen voor de distributies $\log|x|$ en $\operatorname{hw} \dfrac{1}{x}$. Bewijs je beweringen.
(b)[2] Vereenvoudig de uitdrukking $x^2\delta^{(n)}$.
(c)[3] Stel $T, T_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. (i) Wat betekent $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$? (ii) Stel $T_n = n \sin nx$. Bewijs dat $T_n = -n^{-2}T_n''$ en bereken $\lim_{n\to\infty} T_n$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2.[1] De onderdelen (a) en (b) van deze opgave zijn onafhankelijk van elkaar.
(a)[4] Stel $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. (i) Wat is de drager van S? (ii)Geef aan wanneeer S en T aan de convolutievoorwaarde voldoen en defineer in dat geval de convolutie $S * T$. (iii) Stel S en T voldoen aan de convolutievoorwaarde. Bewijs:

$$x^2(S * T) = (x^2S) * T + 2(xS) * (xT) + S * (x^2T).$$

(b)[5] (i) Bereken met behulp van de symboolrekening in $\mathcal{D}'_+$ de elementaire oplossing bij de differentiaaluitdrukking

$$D = \frac{d^2}{dx^2} + 3\frac{d}{dx} + 2.$$

(ii) Bepaal met behulp van (i) de (reguliere) oplossing van $Df = 1$, $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$. (iii) Controleer je antwoord bij (ii).

3.[1] De onderdelen (a) en (b) van deze opgave zijn onafhankelijk van elkaar.
(a)[3] Leg uit: $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$.
(b)[6] Bepaal als volgt de Fouriergetransformeerde $S = \mathcal{F}(T)$ van

$$T = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{hw} \frac{1}{x}.$$

(i) Toon aan $S' = -\delta$. (ii) Toon aan dat S oneven is. (iii) Bepaal S. (Maak gebruik van de bekende theorie. Druk je antwoorden uit in de functie signum (x), die gelijk is aan 1 als $x > 0$ en -1 als $x < 0$.)